

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ESPCI

Concours d'Admission 2025 — Filière PC

Physique A*Miroirs à retournement temporel*Corrigé rédigé par Benjamin Levy et Maxime Rimbaud
Étudiants à l'ESPCI Paris**Table des matières**

1	Questions préliminaires de mécanique	2
2	Ondes et renversement du temps	3
3	Miroir à retournement temporel en milieu homogène	5
4	Considérations spatiales	7
5	Miroir à retournement temporel en milieu réverbérant	8

1 Questions préliminaires de mécanique

Question 1

La particule de masse m et de charge q est soumise au champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$. La deuxième loi de Newton donne :

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} = qE_0 \vec{u}_x.$$

Les équations selon chaque axe sont :

$$\ddot{x} = \frac{qE_0}{m}, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Avec les conditions initiales $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et $\dot{\vec{r}}(0) = v_0 \vec{u}_x$, on intègre :

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(v_0 t + \frac{qE_0}{2m} t^2 \right) \vec{u}_x.}$$

Question 2

On effectue le changement $t \rightarrow -t$ et $v_0 \rightarrow -v_0$. La solution devient :

$$\vec{r}(-t)|_{v_0 \rightarrow -v_0} = \left(-v_0(-t) + \frac{qE_0}{2m}(-t)^2 \right) \vec{u}_x = \left(v_0 t + \frac{qE_0}{2m} t^2 \right) \vec{u}_x,$$

qui est identique à $\vec{r}(t)$. L'équation est donc **invariante par renversement du temps** : si on filme le mouvement à l'envers en inversant également la vitesse initiale, on obtient un mouvement tout aussi physique. Cela vient du fait que la force électrique est indépendante de la vitesse (elle ne dépend que de la position).

Question 3

En présence d'un frottement fluide de constante K , la force s'écrit $\vec{f} = -K\dot{\vec{r}}$. La deuxième loi de Newton donne :

$$m\ddot{x} = -K\dot{x}, \quad \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

En posant $\tau = m/K$, on obtient :

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \vec{u}_x.}$$

Question 4

On effectue $t \rightarrow -t$ et $v_0 \rightarrow -v_0$. La solution renversée serait :

$$x(-t)|_{v_0 \rightarrow -v_0} = -v_0 \tau (1 - e^{t/\tau}) = v_0 \tau (e^{t/\tau} - 1),$$

qui **diverge exponentiellement**. Ce mouvement n'est pas physique pour une particule initialement au repos à l'infini. Il n'y a donc **pas d'invariance par renversement du temps**.

Question 5

La différence fondamentale est la suivante :

- La force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ ne dépend **pas de la vitesse**. Sous renversement du temps, $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ mais \vec{F} reste inchangée. Mathématiquement, \vec{F} est d'ordre zéro en la dérivée temporelle.
- La force de frottement fluide $\vec{f} = -K\vec{v}$ est **proportionnelle à la vitesse**. Sous renversement du temps, $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ donc $\vec{f} \rightarrow +K\vec{v}$, ce qui change le signe du frottement et lui confère un caractère *anti-dissipatif*. Mathématiquement, le terme \dot{x} est d'ordre impair en la dérivée temporelle, ce qui brise l'invariance.

Plus généralement, toute force impaire en la vitesse brise l'invariance par renversement du temps : c'est la signature de la dissipation d'énergie (irréversibilité thermodynamique).

2 Ondes et renversement du temps

Question 6

L'équation d'ondes en une dimension s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Si $u(x, t)$ est solution, alors $u(x, -t)$ l'est aussi, car $\partial^2 u / \partial t^2$ est une dérivée d'ordre **pair** en t : elle est inchangée par $t \rightarrow -t$.

Interprétation physique : Si on filme une onde se propageant et qu'on passe le film à l'envers, on obtient un mouvement tout aussi physiquement valide. L'équation d'ondes est invariante par renversement du temps, à l'image de la mécanique en l'absence de dissipation.

Question 7

La source en $x = 0$ émet $s(t)$. Par symétrie, elle génère deux ondes d'égale amplitude se propageant en $\pm x$. La solution causale (nulle pour $t < 0$) est :

$$u_0(x, t) = s\left(t - \frac{|x|}{c_0}\right) \Theta(t - |x|/c_0),$$

où Θ est la fonction de Heaviside et $s(t)$ désigne l'amplitude de chaque onde propagative. Le retard $|x|/c_0$ correspond au temps de propagation entre la source et le point x .

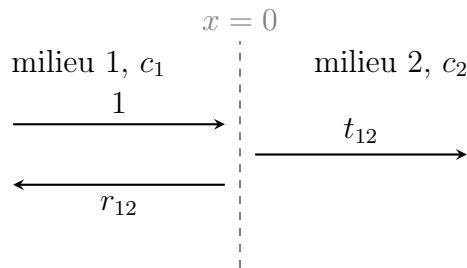
Question 8

L'onde non-causale correspond à $t' = -t$:

$$u_0(x, t') = s\left(-t' - \frac{|x|}{c_0}\right) \Theta(-t' - |x|/c_0).$$

Cette solution est définie pour $t' \leq -|x|/c_0 \leq 0$. **Interprétation :** c'est une onde qui *converge* vers la source depuis les deux côtés, et qui arrive à $x = 0$ à $t' = 0$. Elle correspond physiquement à une onde qui viendrait du passé lointain pour se concentrer sur la source — ce qui est anti-causal.

Question 9 – Schéma et coefficients



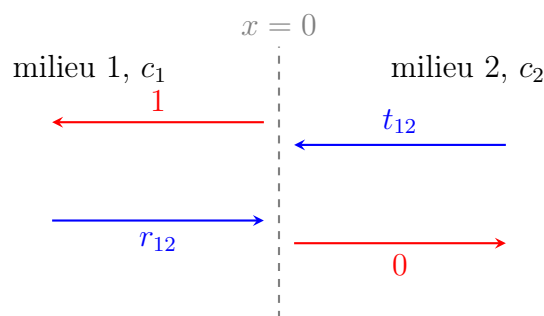
Les relations de continuité du champ et de sa dérivée normale à l'interface donnent les coefficients de Fresnel acoustiques :

$$r_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1},$$

où $Z_i = \rho_i c_i$ est l'impédance acoustique du milieu i .

Question 10

Sous renversement du temps, les ondes changent de sens de propagation :



Deux ondes sont incidentes (en bleu), **deux ondes** en repartent (en rouge). La reconstruction donne une onde d'amplitude 1 vers $x < 0$ et nulle vers $x > 0$.

Question 11

La situation renversée est la superposition de deux problèmes classiques :

1. Onde d'amplitude t_{12} incidente depuis $x > 0$: elle donne une onde transmise $t_{12} \cdot t_{21}$ et une onde réfléchie $t_{12} \cdot r_{21}$.
2. Onde d'amplitude r_{12} incidente depuis $x < 0$: elle donne une onde transmise $r_{12} \cdot t_{12}$ et une onde réfléchie r_{12}^2 .

Pour que la situation soit cohérente avec le renversement temporel d'une onde d'amplitude 1 transmise, on doit avoir une onde reconstituée d'amplitude 1 vers $x < 0$ et nulle vers $x > 0$:

$$t_{12} \cdot t_{21} + r_{12}^2 = 1, \quad t_{12} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot t_{12} = 0.$$

De la deuxième relation : $r_{21} = -r_{12}$. En reportant dans la première : $t_{12} t_{21} = 1 - r_{12}^2$.

Ces relations sont les **relations de Stokes** :

$$\boxed{r_{21} = -r_{12}, \quad t_{12} t_{21} = 1 - r_{12}^2.}$$

Question 12

Pour une onde optique à l'interface entre milieux d'indices n_1 et n_2 (en incidence normale), les coefficients de Fresnel sont :

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad r_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r_{12}. \quad \checkmark$$

$$t_{12} t_{21} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = 1 - r_{12}^2. \quad \checkmark$$

Les relations de Stokes sont bien vérifiées.

3 Miroir à retournement temporel en milieu homogène

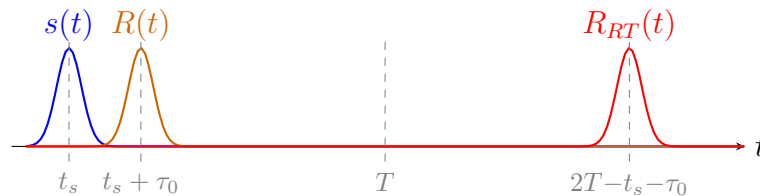
Question 13

Le miroir M situé en $x_0 > 0$ reçoit le signal émis par la source S en $x = 0$ avec un retard x_0/c_0 :

$$R(t) = s\left(t - \frac{x_0}{c_0}\right).$$

Question 14

On pose $\tau_0 = x_0/c_0$ le temps de propagation source-miroir.



$s(t)$ est une impulsion brève centrée en $t_s \ll T$. $R(t)$ est la même impulsion retardée de $\tau_0 = x_0/c_0$. $R_{RT}(t)$ est R relu en sens inverse autour de T : centré en $2T - t_s - \tau_0$.

Question 15

Le miroir réémet à partir de $t = T$ le signal R en chronologie inverse. Le signal émis en retournant le temps autour de T est :

$$R_{RT}(t) = s\left(T - (t - T) - \frac{x_0}{c_0}\right) = s\left(2T - t - \frac{x_0}{c_0}\right).$$

$$R_{RT}(t) = s\left(t' = 2T - t - \frac{x_0}{c_0}\right).$$

Question 16

Le champ produit par M en $x = x_0$ pour $x \leq x_0$ se propage vers les x décroissants avec un retard $(x_0 - x)/c_0$:

$$u_{RT}(x, t) = s\left(2T - t - \frac{x_0}{c_0} - \frac{x_0 - x}{c_0}\right) = s\left(2T - t - \frac{2x_0 - x}{c_0}\right).$$

Question 17

En $x = 0$:

$$s_{RT}(t) = u_{RT}(0, t) = s\left(2T - t - \frac{2x_0}{c_0}\right).$$

C'est une version **renversée temporellement et retardée** de $s(t)$, centrée en $t = 2T - 2x_0/c_0$. La source reçoit son propre signal en sens inverse : l'onde revient se focaliser sur sa position d'origine, comme illustré par la figure de l'énoncé où l'impulsion refocalisée apparaît à $t \approx 2T$.

Question 18

En ajoutant un second miroir en $x = -x_0$ émettant simultanément, le champ qui lui est associé en $x \geq -x_0$ est :

$$u_{RT}^{(-)}(x, t) = s\left(2T - t - \frac{x + x_0}{c_0} - \frac{x_0}{c_0}\right) = s\left(2T - t - \frac{x + 2x_0}{c_0}\right).$$

Le champ global pour $-x_0 \leq x \leq x_0$ est la superposition :

$$u_{RT2}(x, t) = s\left(2T - t - \frac{2x_0 - x}{c_0}\right) + s\left(2T - t - \frac{x + 2x_0}{c_0}\right).$$

Le premier terme correspond à une onde se propageant vers les x négatifs, le second vers les x positifs.

Question 19

Pour $s(t)$ une impulsion brève, u_{RT2} est composé de deux impulsions se propageant en sens opposés. À $t = 2T - 2x_0/c_0$, elles se rencontrent en $x = 0$ et forment une refocalisation. Les deux termes sont identifiables comme :

- Le terme en $2T - t - (2x_0 - x)/c_0$: onde se propageant vers $x \rightarrow -\infty$, analogue à la solution causale partant de $x = 0$.
- Le terme en $2T - t - (x + 2x_0)/c_0$: onde se propageant vers $x \rightarrow +\infty$, analogue à la solution anti-causale convergeant sur la source.

Question 20

Pour ne recréer que la solution anti-causale (champ nul pour $t \geq 2T$), il faudrait **placer une source active en $x = 0$** qui absorbe l'onde causale. Concrètement, la source en $x = 0$ doit émettre un signal opposé à celui qu'elle reçoit après $t = 2T$, annulant ainsi la contribution causale.

4 Considérations spatiales

Question 21

En coordonnées sphériques et à symétrie sphérique ($u = u(r, t)$ uniquement), le Laplacien se réduit à :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}.$$

L'équation d'ondes devient donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

En posant $\Psi = ru$, on retrouve exactement l'équation d'ondes 1D pour $\Psi(r, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0.}$$

Question 22

En régime monochromatique $u(r, t) = \text{Re} [\tilde{u}(r, \omega) e^{-i\omega t}]$, la dérivée temporelle apporte un facteur $-i\omega$. L'équation d'ondes devient l'équation de Helmholtz pour $\tilde{\Psi} = r\tilde{u}$:

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dr^2} + k^2 \tilde{\Psi} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c_0}.$$

Question 23

Les solutions de l'équation de Helmholtz pour $\tilde{\Psi}$ sont $e^{\pm ikr}$, donc :

$$u_c(r, \omega) = \frac{U_c}{r} e^{+ikr} \quad (\text{onde convergente, vers } r = 0),$$

$$u_d(r, \omega) = \frac{U_d}{r} e^{-ikr} \quad (\text{onde divergente, vers } r \rightarrow \infty).$$

Question 24

La source génère une onde divergente $u_d = U_d e^{-ikr}/r$. Après retournement temporel par la sphère, le champ total est la superposition de l'onde convergente et d'une onde divergente résiduelle :

$$u_{tot}(r, \omega) = \frac{U_c e^{+ikr} + U'_d e^{-ikr}}{r}.$$

Pour que u_{tot} soit **fini en** $r = 0$, les deux termes doivent se compenser. En développant au voisinage de $r = 0$:

$$u_{tot} \approx \frac{U_c + U'_d}{r} + O(1),$$

la divergence en $1/r$ est supprimée si et seulement si $U_c + U'_d = 0$, soit :

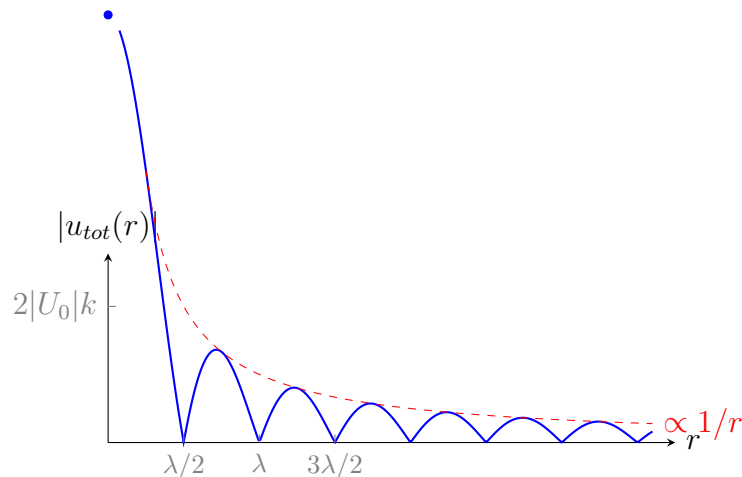
$$\boxed{U'_d = -U_c = -U_0.}$$

Le champ total s'écrit $u_{tot} = U_0(e^{+ikr} - e^{-ikr})/r = 2iU_0 \sin(kr)/r$.

Question 25

$$|u_{tot}(r)| = 2|U_0| \frac{|\sin(kr)|}{r}.$$

Pour $r \rightarrow 0$: $|u_{tot}| \rightarrow 2|U_0|k$ (fini). Pour $r \gg \lambda$, $|u_{tot}| \sim 1/r$ en oscillant. Le premier nœud est en $r = \lambda/2$.



La longueur caractéristique est $\lambda = 2\pi c_0/\omega$. Le champ oscille avec une enveloppe décroissant en $1/r$.

Question 26

Le champ ne se refocalise pas en un point parfait mais en une tache de taille $\sim \lambda$. Il s'agit de la **limite de diffraction** (critère de Rayleigh). On la retrouve notamment en :

- Microscopie optique (résolution limitée à $\lambda/2$) ;
- Imagerie acoustique médicale (échographie) ;
- Télécommunications optiques (taille minimale d'un faisceau focalisé).

Question 27

La sphère de rayon $R = 10\lambda$ a une surface $4\pi R^2 = 4\pi(10\lambda)^2 = 400\pi\lambda^2$. Chaque capteur couvre une surface $\lambda^2/4$. Le nombre de capteurs nécessaires est :

$$N = \frac{400\pi\lambda^2}{\lambda^2/4} = 1600\pi \approx \boxed{5027 \text{ capteurs.}}$$

5 Miroir à retournement temporel en milieu réverbérant

Question 28

La source en $x = -x_0$ émet $s(t)$. L'onde se propage vers $x = x_0$ en subissant des réflexions multiples aux interfaces $x = \pm L$. On note $\tau_0 = 2L/c_2$ la période de résonance de la cavité et $\tau_1 = (x_0 - L)/c_1$ le temps de propagation hors de la cavité.

Le trajet direct (sans réflexion) arrive avec un retard $\tau_d = 2(x_0 - L)/c_1 + 2L/c_2$... En notation compacte, le champ reçu en M est une somme sur tous les trajets possibles avec n allers-retours dans la cavité :

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n s(t - t_n),$$

où $t_n = t_d + n\tau_0$ est le retard du n -ième écho et $A_n = t_{12} t_{21} (r_{12} r_{21})^{n-1} \cdot t_{12}$ encapsule les transmissions et réflexions successives. Pour le trajet direct ($n = 0$) :

$$A_0 = \frac{1}{2} t_{12}^2 e^0,$$

puis pour $n \geq 1$, chaque aller-retour supplémentaire ajoute un facteur $r_{21} r_{12} = -r_{12}^2$.

Question 29

Pour $s(t) = \exp(-t^2/2\tau^2)$ (impulsion gaussienne de durée τ), le signal $R(t)$ est une succession d'impulsions gaussiennes de plus en plus amorties, espacées de $\tau_0 = 2L/c_2$, avec des amplitudes décroissantes (car $|r_{12}^2| < 1$).

Question 30

Le signal réémis est $R_{RT}(t) = R(2T - t)$ (lecture en chronologie inverse). Par réciprocity du milieu, le signal reçu en $x = -x_0$ est :

$$s_{RT}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n s(t - (2T - t_n)).$$

Cela correspond à une somme d'impulsions de s renversé temporellement arrivant à différents instants $2T - t_n$. La refocalisation n'est pas parfaite en général, car les différents échos arrivent à des temps distincts.

Question 31

En régime monochromatique, la réponse en M à une excitation $s(t) = \text{Re}[S(\omega)e^{-i\omega t}]$ est :

$$R(\omega) = S(\omega) \cdot H(\omega),$$

où $H(\omega)$ est la fonction de transfert. On somme les contributions de tous les trajets (réflexions multiples dans la cavité) :

$$H(\omega) = \frac{1}{2} t_{12} e^{ik_1(x_0-L)} \cdot \frac{t_{12} e^{ik_1(x_0-L)}}{1 - r_{21} r_{12} e^{2ik_2L}},$$

où $k_i = \omega/c_i$. En simplifiant :

$$R(\omega) = \frac{t_{12}^2 e^{2ik_1(x_0-L)}}{2(1 - r_{12}^2 e^{2ik_2L})} S(\omega).$$

(On a utilisé $r_{21} = -r_{12}$, donc $r_{21}r_{12} = -r_{12}^2$.)

Question 32

Les fréquences de résonance correspondent aux pôles du dénominateur, c'est-à-dire :

$$r_{12}^2 e^{2ik_2L} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{2ik_2L} = \frac{1}{r_{12}^2}.$$

Si les réflexions sont fortes ($|r_{12}| \rightarrow 1$), les résonances sont nettes et se produisent pour $2k_2L = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$, soit :

$$\boxed{2L = n\lambda_2, \quad n \in \mathbb{N}^*}.$$

La longueur L est un multiple entier de la demi-longueur d'onde dans le milieu 2 : c'est la condition de cavité résonante de Fabry-Pérot.

Question 33

En milieu homogène, tous les modes (fréquences) du signal s sont transmis avec la même amplitude, de sorte que l'opération de retournement temporel reconstruit fidèlement le signal. Ici, la cavité Fabry-Pérot agit comme un filtre : seules les fréquences proches des résonances sont transmises avec une grande amplitude. Les fréquences hors résonance sont très atténuées. Ainsi, le signal $R(\omega)$ ne contient plus toute l'information spectrale de s , et le retournement temporel ne peut pas reconstruire s fidèlement : des fréquences sont perdues définitivement.

Question 34

Par réciprocity (le milieu est linéaire et invariant par réciprocity), le signal reçu en $x = 0$ lorsque M joue le rôle de miroir à retournement temporel est :

$$s_{RT}(t) = \sum_{n=0}^{N_t} a_n s(t - (2T - t_0 - n\tau)).$$

C'est la convolution de s retourné temporellement avec la réponse impulsionnelle $R(t)$: $s_{RT}(t) = (R * \tilde{s})(t)$ où $\tilde{s}(t) = s(2T - t)$.

Question 35

À $t = 2T$:

$$s_{RT}(2T) = \sum_{n=0}^{N_t} a_n s(2T - (2T - t_0 - n\tau)) = \sum_{n=0}^{N_t} a_n s(t_0 + n\tau).$$

Si les a_n sont des variables aléatoires indépendantes à moyenne nulle et de variance σ^2 , et si $s(t_0 + n\tau) \approx s(t_0)$ (impulsion courte), alors :

$$s_{RT}(2T) \approx s(t_0) \sum_{n=0}^{N_t} a_n^2 \approx N_t \sigma^2 s(t_0).$$

La somme des a_n^2 vaut en moyenne $N_t \sigma^2$ car les a_n sont indépendants et $\langle a_n^2 \rangle = \sigma^2$.

Question 36

Pour $t = 2T + m\tau$ avec $m \neq 0$:

$$s_{RT}(2T + m\tau) = \sum_{n=0}^{N_t} a_n s(t_0 + (n + m)\tau).$$

Pour une impulsion brève (durée τ), les termes $s(t_0 + (n + m)\tau) \approx 0$ pour $n + m \neq 0$, donc le seul terme non nul est $n = -m$ (hors de la somme si $m > 0$). Le signal est donc de l'ordre de $\sum_n a_n a_{n'}$ $\ll N_t \sigma^2$. Plus précisément, les a_n étant indépendants à moyenne nulle, la somme converge vers zéro en probabilité pour N_t grand.

Question 37 – Commentaires

Ces résultats révèlent le **miracle du milieu réverbérant** :

- À $t = 2T$, le signal se refocalise sur la source avec une amplitude proportionnelle à N_t (le nombre d'échos enregistrés). Plus le milieu est complexe (nombreux échos), plus la refocalisation est intense.
- Aux autres instants, le signal est de l'ordre de $\sqrt{N_t} \sigma^2 s(0)$ (fluctuations aléatoires), soit un rapport signal/bruit de l'ordre de $\sqrt{N_t}$.
- Ainsi, un **unique capteur** dans un milieu réverbérant peut reconstruire aussi bien qu'une sphère entière de capteurs en espace libre : le milieu complexe remplace la multiplicité des capteurs en créant de nombreux trajets indépendants. C'est l'essence de la technique des miroirs à retournement temporel de Mathias Fink.

* * *

*Corrigé rédigé par Benjamin Levy et Maxime Rimbaud, étudiants à l'ESPCI Paris.
PrepaMentor — contact@prepamentor.fr*