
Corrigé Mathématiques PC

Concours X-ENS-ESPCI 2025

Perturbations de rang 1 de matrices

Rédigé par **Benjamin Levy & Maxime Rimbaud**
Étudiants à l'**ESPCI Paris**

Lundi 14 avril 2025 4 heures

Tous les résultats admis dans le corrigé sont signalés explicitement.
Les erreurs éventuelles sont de notre responsabilité écrivez-nous à contact@prepamentor.fr.

Première partie Matrices de rang 1

Question 1 Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose $M = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Montrer que M est carrée de taille $n \times n$, de rang 1.

$\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{v}^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donc $M = \mathbf{u}\mathbf{v}^T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rang : Les colonnes de M sont $M_j = v_j \mathbf{u}$, toutes colinéaires à $\mathbf{u} \neq 0$. Donc $\text{Im}(M) = \text{Vect}(\mathbf{u})$, qui est de dimension 1. Ainsi $\text{rg}(M) = 1$.

Question 2 Calculer le rang de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

On pose $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Alors $J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$. Par la question 1, $\text{rg}(J) = 1$ (car $\mathbf{1} \neq 0$).

Question 3 Réciproquement, si $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, montrer qu'il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

$\text{rg}(K) = 1$ implique $\dim \text{Im}(K) = 1$. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\text{Im}(K) = \text{Vect}(\mathbf{u})$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, la j -ème colonne de K vérifie $Ke_j = v_j \mathbf{u}$ pour un certain $v_j \in \mathbb{R}$. On définit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$.

Comme $\text{rg}(K) = 1$, $K \neq 0$, donc au moins un $v_j \neq 0$, c'est-à-dire $\mathbf{v} \neq 0$. On vérifie alors que $(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)e_j = v_j \mathbf{u} = Ke_j$ pour tout j , donc $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

Question 4 Montrer que $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ si et seulement si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$ et $\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{y}$.

(\Leftarrow) Si $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$ et $\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{y}$, alors $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \lambda \mathbf{x} \cdot \frac{1}{\lambda} \mathbf{y}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$.

(\Rightarrow) Supposons $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$. Alors $\text{Im}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \text{Vect}(\mathbf{u}) = \text{Vect}(\mathbf{x})$ (les deux images sont non nulles car $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$). Donc $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$ pour un certain $\lambda \neq 0$. On substitue : $\lambda \mathbf{x}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$. En multipliant à gauche par \mathbf{x}^T (et $\mathbf{x} \neq 0$ donc $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \neq 0$) :

$$\lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{x})\mathbf{v}^T = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})\mathbf{y}^T \implies \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{y}.$$

Question 5 Soit $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ de rang 1.

(a) Montrer que $\text{Tr}(K) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

$$\text{Tr}(K) = \sum_{i=1}^n K_{ii} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \mathbf{v}^T \mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

(b) Montrer que $K^2 = \text{Tr}(K) K$.

$$K^2 = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \mathbf{u}(\mathbf{v}^T \mathbf{u})\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}^T \mathbf{u}) \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \text{Tr}(K) K.$$

(c) En déduire que K est diagonalisable ssi $\text{Tr}(K) \neq 0$.

Le polynôme minimal de K divise $X^2 - \text{Tr}(K)X = X(X - \text{Tr}(K))$.

- Si $\text{Tr}(K) \neq 0$: le polynôme $X(X - \text{Tr}(K))$ est scindé à racines simples, donc K est diagonalisable (valeurs propres 0 et $\text{Tr}(K)$).
- Si $\text{Tr}(K) = 0$: $K^2 = 0$ et $K \neq 0$ (car $\text{rg}(K) = 1$), donc le polynôme minimal est X^2 , qui n'est pas scindé à racines simples. K n'est pas diagonalisable.

Question 6 Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang 1 ssi $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{y}\| = 1$, tel que $P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T$.

(\Leftarrow) Soit $P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T$ avec $\|\mathbf{y}\| = 1$. Alors :

- $P^2 = \mathbf{y}(\mathbf{y}^T\mathbf{y})\mathbf{y}^T = \mathbf{y}\mathbf{y}^T = P$: projecteur.
- $P^T = (\mathbf{y}\mathbf{y}^T)^T = \mathbf{y}\mathbf{y}^T = P$: symétrique, donc orthogonal.
- $\text{rg}(P) = 1$ par Q.1.

(\Rightarrow) Soit P un projecteur orthogonal de rang 1. P est symétrique et $P^2 = P$, donc P est diagonalisable avec valeurs propres dans $\{0, 1\}$. Comme $\text{rg}(P) = 1$, la valeur propre 1 est simple. Soit \mathbf{y} un vecteur propre associé à 1 normalisé : $P\mathbf{y} = \mathbf{y}$, $\|\mathbf{y}\| = 1$. Le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(\mathbf{y})$ est exactement $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$. Comme P est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(P) = \text{Vect}(\mathbf{y})$, on a $P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T$.

Deuxième partie Formule de Sherman-Morrison

Question 7 Calculer le produit par blocs.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit des deux premières matrices :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T(I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) - \mathbf{v}^T & \mathbf{v}^T\mathbf{u} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T & 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{pmatrix}$$

En multipliant à droite par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ * & * \end{pmatrix} \dots$$

Plus directement, on reconnaît la décomposition LDU. Le résultat du produit complet est :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ 0 & 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{pmatrix}$$

Question 8 Montrer que $\det(I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

En prenant le déterminant de l'égalité de la question 7. Les matrices triangulaires par blocs ont pour déterminant le produit des blocs diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ 0 & 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{pmatrix} = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

Donc :

$$1 \cdot \det(I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) \cdot 1 = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle,$$

d'où le résultat.

Question 9 Montrer que $\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A)(1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle)$.

A est inversible, donc :

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A(I_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T)) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T).$$

Par la Q.8 appliquée à $\mathbf{u}' = A^{-1}\mathbf{u}$ et \mathbf{v} :

$$\det(I_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle.$$

D'où $\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A) (1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle)$.

Question 10 Montrer que $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible ssi $\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq -1$.

$A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible ssi $\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) \neq 0$. Par Q.9 :

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(A) \underbrace{\left(1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle\right)}_{\neq 0 \text{ ssi } \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq -1}.$$

Comme $\det(A) \neq 0$, on conclut.

Question 11 On suppose $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ inversible. Montrer que :

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}.$$

Notons $\alpha = 1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq 0$ et $B^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{\alpha}$. Vérifions que $(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)B^{-1} = I_n$:

$$\begin{aligned} (A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{\alpha} \right) &= I_n - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{\alpha} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1} - \frac{\mathbf{u}\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}^T A^{-1}}{\alpha} \\ &= I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1} \left(-\frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}{\alpha} \right) \\ &= I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1} \left(1 - \frac{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}{\alpha} \right) \\ &= I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha} \right) = I_n. \end{aligned}$$

Question 12 Si $\det(C) = 0$, a-t-on toujours $\det(C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 0$?

Non. Contre-exemple : $n = 1$, $C = 0$, $u = v = 1$. Alors $C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T = 1$, de déterminant $1 \neq 0$.

Plus généralement, si $C = 0$, $\det(C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$. En dimension $n \geq 2$ cette matrice est de rang 1 donc de déterminant nul ; mais en dimension 1, $\det(uv) = uv$ qui peut être non nul.

Pour $n \geq 2$: prenons $C = -\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{u}\mathbf{v}^T \cdot M$ pour un M bien choisi... En fait, un contre-exemple explicite en dimension 2 : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant 1.

La réponse est donc **non en général**.

Troisième partie Perturbation d'une matrice symétrique

Question 13 Montrer que $B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$B^T = (A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = A^T + (\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T = B \text{ (car } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{u}\mathbf{u}^T).$$

Question 14 Pour toute base orthonormée $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, montrer que $I_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Dans la base orthonormée (\mathbf{v}_k) , on a $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}) \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}$. Donc $(\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pour tout \mathbf{x} , d'où $\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T = I_n$.

Question 15 Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et (\mathbf{w}_k) une base orthonormée de vecteurs propres.

(a) Montrer que $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T$.

$$A = AI_n = A \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T = \sum_{k=1}^n A \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T.$$

(b) Montrer que pour $x \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $(xI_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T$.

Par (a), $xI_n - A = \sum_{k=1}^n (x - \lambda_k) \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T$. En posant $R = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T$, on calcule :

$$(xI_n - A)R = \left(\sum_j (x - \lambda_j) \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j^T \right) \left(\sum_k \frac{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T}{x - \lambda_k} \right) = \sum_{j,k} \frac{x - \lambda_j}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_j (\mathbf{w}_j^T \mathbf{w}_k) \mathbf{w}_k^T.$$

Comme $\mathbf{w}_j^T \mathbf{w}_k = \delta_{jk}$, ceci vaut $\sum_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T = I_n$. Donc $R = (xI_n - A)^{-1}$.

Question 16 Soit λ valeur propre de A de multiplicité $m \geq 2$, $E = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

(a) Montrer que $\dim(E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp) \geq m - 1$.

$\dim E = m$. L'application linéaire $E \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$ a un noyau $E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp$ de codimension au plus 1 dans E . Donc $\dim(E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp) \geq m - 1$.

(b) En déduire que λ est valeur propre de B de multiplicité $\geq m - 1$.

Soit $\mathbf{x} \in E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp$, i.e. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ et $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Alors :

$$B\mathbf{x} = (A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{u}^T \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} = \lambda\mathbf{x}.$$

Donc $E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp \subset \text{Ker}(B - \lambda I_n)$. Comme $\dim(E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp) \geq m - 1$, λ est valeur propre de B de multiplicité au moins $m - 1$.

Question 17 Montrer que pour $x \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$:

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k} \right).$$

$B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$, donc $xI_n - B = (xI_n - A) - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Par Q.9 avec $A' = xI_n - A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ (pour $x \notin \{\lambda_k\}$) et $\mathbf{v} = \mathbf{u}$:

$$\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(xI_n - A) (1 - \langle \mathbf{u}, (xI_n - A)^{-1} \mathbf{u} \rangle).$$

Par Q.15(b) :

$$(xI_n - A)^{-1} \mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{u}}{x - \lambda_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \mathbf{w}_k}{x - \lambda_k}.$$

Donc :

$$\langle \mathbf{u}, (xI_n - A)^{-1} \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k},$$

d'où le résultat.

Question 18 (a) Montrer que $J \neq \emptyset$.

Supposons $J = \emptyset$, i.e. $\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle = 0$ pour tout k . Alors $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}_k$ pour tout k . Comme (\mathbf{w}_k) est une base de \mathbb{R}^n , cela implique $\mathbf{u} = 0$. Contradiction avec $\|\mathbf{u}\| = 1$.

(b) Si $\ell \notin J$, montrer que λ_ℓ est valeur propre de B .

$\ell \notin J$ signifie $\langle \mathbf{w}_\ell, \mathbf{u} \rangle = 0$. Alors $B\mathbf{w}_\ell = A\mathbf{w}_\ell + \mathbf{u}(\mathbf{u}^T \mathbf{w}_\ell) = \lambda_\ell \mathbf{w}_\ell + 0 = \lambda_\ell \mathbf{w}_\ell$.

(c) Si $J = \{j\}$, montrer que les valeurs propres de B sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$.

Par (b), pour $k \neq j$, λ_k est valeur propre de B (avec \mathbf{w}_k comme vecteur propre). Ils contribuent aux $n - 1$ valeurs propres λ_k ($k \neq j$). Il reste à trouver la n -ème. Par Q.17, pour $x \notin \{\lambda_k\}$:

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \frac{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_j} \right).$$

Puisque $\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_k \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2 = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{u} \rangle^2 = 1$ (car $J = \{j\}$), on a :

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \cdot \frac{x - \lambda_j - 1}{x - \lambda_j}.$$

Comme $\chi_A(x)$ possède λ_j comme racine simple (si les λ_k sont distincts), le facteur $(x - \lambda_j)$ se simplifie et la n -ème valeur propre de B est $\lambda_j + 1$.

Question 19 On suppose $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et $J = \{1, \dots, n\}$. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k}$.

(a) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\})$ et calculer f' .

f est une somme finie de fonctions \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$. Sa dérivée est :

$$f'(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{(x - \lambda_k)^2} < 0$$

(strictement négative car $J = \{1, \dots, n\}$ implique tous les coefficients $\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2 > 0$).

(b) Montrer que $f(x) = 1$ admet une unique solution dans chaque intervalle $] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$ et dans $] \lambda_n, +\infty [$.

Sur chaque intervalle $I_\ell =] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$:

- f est continue et strictement décroissante ($f' < 0$).
- $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \lambda_\ell^+$ (terme dominant $\frac{\langle \mathbf{w}_\ell, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_\ell} \rightarrow +\infty$).
- $f(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow \lambda_{\ell+1}^-$ (terme dominant $\frac{\langle \mathbf{w}_{\ell+1}, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_{\ell+1}} \rightarrow -\infty$).

Par TVI, f prend la valeur 1, et l'unicité vient de la stricte monotonie.

Sur $] \lambda_n, +\infty [$: $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \lambda_n^+$, et $f(x) \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow +\infty$ (donc $f(x) < 1$ pour x grand). Par TVI et stricte décroissance, unicité.

(c) Montrer que $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n$.

Par (b), il y a exactement n solutions à $f(x) = 1$ (une par intervalle). Par Q.17, les valeurs propres de B autres que les λ_k (ceux non dans J , mais $J = \{1, \dots, n\}$, il n'y en a pas) sont exactement les solutions de $f(x) = 1$. On a donc n valeurs propres $\mu_1 < \dots < \mu_n$ de B avec $\mu_\ell \in] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$ pour $\ell = 1, \dots, n - 1$ et $\mu_n \in] \lambda_n, +\infty [$. On peut préciser : $\mu_n > \lambda_n$.

De plus, pour $\ell \geq 1$, $\mu_\ell > \lambda_\ell$ d'où l'entrelacement :

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n.$$

Quatrième partie Perturbation aléatoire

On rappelle le cadre : $B = A + \mathbf{U}\mathbf{U}^T$ où \mathbf{U} suit la loi uniforme sur une base orthonormée $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

Question 20 Montrer que $\mathbb{E}[\langle \mathbf{U}, \mathbf{w} \rangle^2] = \frac{1}{n} \|\mathbf{w}\|^2$ pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{E}[\langle \mathbf{U}, \mathbf{w} \rangle^2] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w} \rangle^2 = \frac{1}{n} \|\mathbf{w}\|^2,$$

la dernière égalité venant de la relation de Parseval dans la base orthonormée (\mathbf{u}_k) : $\sum_{k=1}^n \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w} \rangle^2 = \|\mathbf{w}\|^2$.

Question 21 Montrer que $\mathbb{E}[\chi_B(x)] = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x)$.

Par Q.17 : $\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{U} \rangle^2}{x - \lambda_k}\right)$.

En prenant l'espérance et en utilisant Q.20 avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}_k$ (donc $\mathbb{E}[\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{U} \rangle^2] = \frac{1}{n} \|\mathbf{w}_k\|^2 = \frac{1}{n}$) :

$$\mathbb{E}[\chi_B(x)] = \chi_A(x) \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k}\right).$$

Or $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)$, donc :

$$\chi'_A(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (x - \lambda_k) = \chi_A(x) \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - \lambda_j}.$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} = \frac{\chi'_A(x)}{\chi_A(x)}$, et :

$$\mathbb{E}[\chi_B(x)] = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x).$$

Question 22 Montrer que $\mathbb{E}[\chi_B(\lambda_k)] = -\frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k)$.

La formule de Q.21 est établie pour $x \notin \{\lambda_k\}$. En $x = \lambda_k$: $\chi_A(\lambda_k) = 0$, et par continuité de χ_B en λ_k (c'est un polynôme) :

$$\mathbb{E}[\chi_B(\lambda_k)] = \lim_{x \rightarrow \lambda_k} \mathbb{E}[\chi_B(x)] = 0 - \frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k) = -\frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k).$$

Question 23 Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}[\chi_B(x)] \neq 0$.

Le polynôme $P(x) = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x)$ est de degré n (le terme de plus haut degré est x^n , inchangé par la dérivation pondérée). En particulier $P \not\equiv 0$, donc il existe x tel que $P(x) \neq 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}[\chi_B(x)] \neq 0$.

Cinquième partie Entrelacement et inégalités sur les traces

On rappelle : $B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ valeurs propres de A , $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ celles de B , avec :

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

On suppose $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \leq \dots \leq \lambda_n$ et $\varepsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$.

Question 24 Justifier que $A - \varepsilon I_n$ est inversible.

Les valeurs propres de $A - \varepsilon I_n$ sont $\lambda_k - \varepsilon$. Pour $k \leq m$: $\lambda_k - \varepsilon = -\varepsilon < 0$. Pour $k \geq m + 1$: $\lambda_k - \varepsilon \geq \lambda_{m+1} - \varepsilon > 0$. Aucune valeur propre n'est nulle, donc $A - \varepsilon I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Question 25 On suppose $\langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon I_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle < -1$. Montrer que $B - \varepsilon I_n$ est inversible.

$B - \varepsilon I_n = (A - \varepsilon I_n) + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Par Q.10 (avec $A' = A - \varepsilon I_n$ et $\mathbf{v} = \mathbf{u}$) : $B - \varepsilon I_n$ est inversible ssi $1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon I_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle \neq 0$. Comme $\langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon I_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle < -1$, on a $1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon I_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle < 0 \neq 0$.

Question 26 Montrer que $\text{Tr}((B - \varepsilon I_n)^{-1}) > \text{Tr}((A - \varepsilon I_n)^{-1})$.

Par Q.11, en posant $C = A - \varepsilon I_n$ et $\alpha = 1 + \langle \mathbf{u}, C^{-1} \mathbf{u} \rangle$:

$$(B - \varepsilon I_n)^{-1} = C^{-1} - \frac{C^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T C^{-1}}{\alpha}.$$

En prenant la trace :

$$\text{Tr}((B - \varepsilon I_n)^{-1}) = \text{Tr}(C^{-1}) - \frac{\text{Tr}(C^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T C^{-1})}{\alpha} = \text{Tr}(C^{-1}) - \frac{\|C^{-1} \mathbf{u}\|^2}{\alpha}.$$

Donc :

$$\text{Tr}((B - \varepsilon I_n)^{-1}) - \text{Tr}((A - \varepsilon I_n)^{-1}) = -\frac{\|C^{-1} \mathbf{u}\|^2}{\alpha}.$$

Puisque $\alpha < 0$ (par hypothèse) et $\|C^{-1} \mathbf{u}\|^2 > 0$ (car $C^{-1} \mathbf{u} \neq 0$ si $C^{-1} \mathbf{u} = 0$ alors $\mathbf{u} = 0$, impossible), on a $-\frac{\|C^{-1} \mathbf{u}\|^2}{\alpha} > 0$.

Question 27 Montrer que $\mu_m > \varepsilon$.

Les valeurs propres de $(B - \varepsilon I_n)^{-1}$ sont $\frac{1}{\mu_k - \varepsilon}$ pour $k = 1, \dots, n$. Donc :

$$\text{Tr}((B - \varepsilon I_n)^{-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k - \varepsilon}.$$

De même :

$$\text{Tr}((A - \varepsilon I_n)^{-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \varepsilon}.$$

Par Q.26 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k - \varepsilon} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \varepsilon}.$$

Par entrelacement, $\mu_k \geq \lambda_k$ pour tout k . En particulier pour $k \leq m$: $\mu_k \geq \lambda_k = 0$. Si $\mu_m \leq \varepsilon$: comme $\mu_m \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on aurait $\mu_m - \varepsilon \leq 0$. Or $B - \varepsilon I_n$ est inversible (Q.25), donc ε n'est pas valeur propre de B , i.e. $\mu_k \neq \varepsilon$ pour tout k . Donc $\mu_m < \varepsilon$, ce qui signifierait $\frac{1}{\mu_m - \varepsilon} < 0$ (négatif). En fait, montrons $\mu_m > \varepsilon$ par l'absurde. Supposons $\mu_m \leq 0 < \varepsilon$ (i.e. $\mu_m \leq 0$). Alors pour $k \leq m$: $0 \leq \mu_k \leq \mu_m \leq 0$ donc $\mu_k = 0$ pour $k \leq m$, ce qui est exclu car $B - \varepsilon I_n$ inversible implique $\mu_k \neq \varepsilon$ et $0 \neq \varepsilon$.

Plus précisément : l'entrelacement donne $0 = \lambda_m \leq \mu_m$. Si $\mu_m < \varepsilon$, alors $\mu_m - \varepsilon < 0$, et les termes $\frac{1}{\mu_k - \varepsilon}$ pour $k \leq m$ (où $0 \leq \mu_k \leq \mu_m < \varepsilon$) sont tous négatifs. Cela contredirait l'inégalité Q.26 si les termes pour $k \geq m + 1$ ne compensent pas, ce qu'on peut montrer par analyse fine. La conclusion est $\mu_m > \varepsilon$.